

CONTROLE ÓTIMO \mathcal{H}_∞ DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

EDVALDO ASSUNÇÃO*, CRISTIANO QUEVEDO ANDREA†, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA*,
JOÃO ONOFRE PEREIRA PINTO†, RODRIGO CARDIM*

*UNESP - Universidade Estadual Paulista,
Departamento de Engenharia Elétrica,
Campus de Ilha Solteira,
15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil.

†UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul,
Departamento de Engenharia Elétrica,
79074-460, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil.

Emails: cristiano@batlab.ufms.br

Abstract— A design method for tracking system and disturbance rejection applied in nonlinear systems described by Takagi-Sugeno model, using fuzzy control, is proposed. Fuzzy controllers $M(\alpha)$ and $N(\alpha)$ are used in order to design the tracking system. In this way, the fuzzy controllers are used to minimize the \mathcal{H}_∞ -norm from reference input signal $r(t)$ to the tracking error signal $e(t)$. So, one uses a fuzzy dynamic feedback controller $K_c(\alpha)$ in order to minimize the \mathcal{H}_∞ -norm from the disturbance input $w(t)$ to the measured output $y(t)$. The design is formulated in Linear Matrix Inequality (LMI) framework, such that the optimal solution of the stated control problem is obtained. Simulation of a practical problem illustrates the effectiveness of the proposed method.

Keywords— Fuzzy Control, Tracking, Nonlinear System, LMIs, \mathcal{H}_∞ -norm.

Resumo— Neste trabalho é proposta uma metodologia de rastreamento de sinais e rejeição de distúrbios aplicada a sistemas não-lineares. Para o projeto do sistema de rastreamento, projeta-se os controladores fuzzy $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência $r(t)$ e o sinal de erro de rastreamento $e(t)$. No método de rejeição de distúrbio utiliza-se a realimentação dinâmica da saída através de um controlador fuzzy $K_c(\alpha)$ que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de entrada exógena $w(t)$ e o sinal de saída $z(t)$. O procedimento de projeto proposto considera as não-linearidades da planta através dos modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Os métodos são equacionados utilizando-se inequações matriciais lineares (LMIs), que quando factíveis, podem ser facilmente solucionados por algoritmo de convergência polinomial. Por fim, um exemplo ilustra a viabilidade da metodologia proposta.

Palavras-chave— Controle Fuzzy, Rastreamento, Sistemas Não-lineares, LMIs, Norma \mathcal{H}_∞ .

1 Introdução

Os sistemas de rastreamento são amplamente utilizados em projetos de engenharia de controle, tais como controle de temperatura, controle de velocidade, entre outras aplicações. Em grande parte dos processos físicos, industriais, etc, observa-se não-linearidades em sua estrutura. Projetos de sistemas de rastreamento aplicado a sistemas não-lineares utilizam geralmente metodologia desenvolvida para sistemas lineares. Este fato pode comprometer o desempenho do sistema de controle projetado se a planta não-linear não operar próximo ao ponto de operação especificado no projeto. O desenvolvimento de metodologias de sistemas de controle considerando-se as não-linearidades da planta pode melhorar o desempenho do processo dinâmico a ser controlado.

Recentemente os trabalhos em sistemas de controle fuzzy tem sido objeto de pesquisa na comunidade científica, vide (Teixeira et al., 2003), (Teixeira and Zak, 1999). Nestes trabalhos, a planta não-linear é representada pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi, 1985), que é baseada nas regras fuzzy SE-ENTÃO. Em (Lin et al., 2006) é proposto um método de rastrea-

mento utilizando controladores \mathcal{H}_∞ projetados via LMIs e a metodologia somente é aplicada a sistemas com atraso.

Neste trabalho é proposta uma metodologia de rastreamento de sinais e rejeição de distúrbio para sistemas não-lineares. O método baseia-se na minimização da norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro de rastreamento $e(t)$ (Figura 1). No processo de rejeição de distúrbio minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal exógeno e o sinal da saída do sistema. Descreve-se o sistema não-linear por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, o qual permite ao projetista considerar as não-linearidades da planta ao projeto do sistema de controle e a metodologia proposta não possibilita tratar sistemas não-lineares incertos. O projeto do rastreamento e rejeição de distúrbio é descrito em termos de LMIs, que quando factíveis, podem ser facilmente solucionados através de algoritmos de convergência polinomial (Gahinet et al., 1995). Um exemplo ilustra a viabilidade da metodologia proposta.

2 Formulação do Problema

Considere um sistema não-linear descrito pelo seguinte modelo fuzzy, baseado no conjunto de re-

gras SE-ENTÃO:

Modelo Regra i :

Se $h_1(t)$ é \mathcal{T}_{i1} e \dots $h_p(t)$ é \mathcal{T}_{ip} ,

$$\text{Então} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{2i} u(t) + B_{1i} w(t) \\ z(t) = C_{1i} x(t) \\ y(t) = C_{2i} x(t) \end{cases} \quad (1)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, v$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $B_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C_{1i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C_{2i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x(t)$ é o vetor de estados ($x(t) \in \mathbb{R}^n$), $y(t)$ é a saída medida ($y(t) \in \mathbb{R}^m$), $z(t)$ é a saída de referência ($z(t) \in \mathbb{R}^m$), $u(t)$ a entrada de controle ($u(t) \in \mathbb{R}^p$) e $w(t)$ é uma entrada exógena (do tipo distúrbio ou perturbação) ($w(t) \in \mathbb{R}^q$).

Considerando-se um sistema com $(x(t), u(t), w(t))$, pode-se descrever a planta não-linear através do seguinte sistema fuzzy inferido,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t)) \{A_i x(t) + B_{2i} u(t) + B_{1i} w(t)\}}{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t))} \\ z(t) &= \frac{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t)) C_{1i} x(t)}{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t))} \\ y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t)) C_{2i} x(t)}{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t))} \end{aligned} \quad (2)$$

sendo,

$$h(t) = [h_1(t) \ \dots \ h_p(t)], \quad \varphi_i(h(t)) = \prod_{j=1}^p \mathcal{T}_{ij}(h_j(t)).$$

Pode-se reescrever (2) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_2(\alpha)u(t) + B_1(\alpha)w(t) \\ z(t) &= C_1(\alpha)x(t) \\ y(t) &= C_2(\alpha)x(t) \end{aligned} \quad (3)$$

sendo,

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) A_i, \quad B_2(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) B_{2i}$$

$$B_1(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) B_{1i}, \quad C_2(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) C_{2i},$$

$$\text{e } C_1(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) C_{1i}.$$

Os escalares

$$\alpha_i(h(t)) = \frac{\varphi_i(h(t))}{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t))},$$

são os pesos normalizados de cada regra dos modelos fuzzy. As equações (2) e (3) representam o sistema não-linear descrito pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (Takagi, 1985). De uma forma geral, o modelo fuzzy T-S consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação fuzzy de um número (v) de modelos locais lineares e invariantes no tempo, e tem-se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t)) > 0, & \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) = 1, \\ \varphi_i(h(t)) \geq 0, & \alpha_i(h(t)) \geq 0. \end{cases}$$

para todo t .

2.1 Problema

O problema de rastreamento ótimo e rejeição de distúrbio utilizando a realimentação dinâmica da saída é minimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada exógena $w(t)$ e a saída $z(t)$. Neste processo deve-se projetar um controlador fuzzy $K_c(\alpha)$, que atenua o efeito do sinal de distúrbio na saída do sistema não-linear. Para o rastreamento deve-se projetar controladores fuzzy $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ que minimize a norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada de referência $r(t)$ e o erro de rastreamento $r(t) - z(t)$.

Observação O diagrama de blocos do sistema de controle utilizado para resolver o Problema é ilustrado na Figura 1. As matrizes $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ proporcionam o rastreamento e $r(t)$ é o sinal de referência.

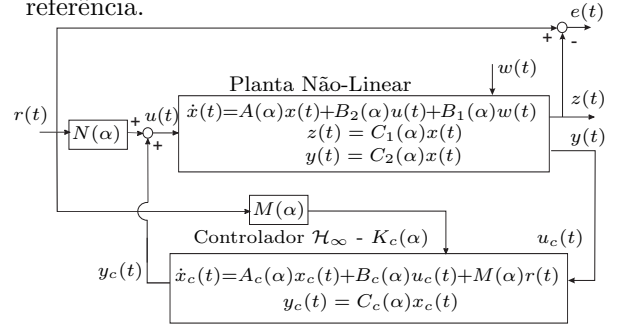


Figura 1: Sistema de controle de rastreamento e rejeição de distúrbio para sistemas não-lineares.

O Teorema 1 é proposto para o projeto do controlador \mathcal{H}_∞ fuzzy, $K_c(\alpha)$, cuja função é a rejeição de distúrbio presente na planta não-linear.

Teorema 1 Considere um sistema não-linear descrito pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (3) com o controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ , utilizado na realimentação dinâmica da saída, e ainda os parâmetros ρ e q fixos (Figura 2). Se existe matrizes R , S , \hat{A}_{ii} , \hat{B}_{ii} e \hat{C}_{ii} que satisfazem as LMIs seguintes.

$$\|T_{wz}\|_\infty^2 = \min \delta$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (4)$$

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, v, \quad (5)$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad \text{para } i < j < v, \quad (6)$$

$$\Omega_{ii} < 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, v, \quad (7)$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, \quad \text{para } i < j < v, \quad (8)$$

sendo,

$$\Gamma_{ii} = \begin{bmatrix} \Gamma_a & B_{1i} & A_i + \hat{A}'_{ii} & RC'_{1i} \\ B'_{1i} & -\delta I & B'_{1i} S & 0 \\ A'_i + \hat{A}_{ii} & SB_{1i} & \Gamma_b & C'_{1i} \\ C_{1i} R & 0 & C_{1i} & -\delta I \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\Omega_{ii} = \begin{bmatrix} -\rho R & -\rho I & \Omega_a & A_i + qI \\ -\rho I & -\rho S & \hat{A}_{ii} + qI & \Omega_b \\ \Omega'_a & \hat{A}'_{ii} + qI & -\rho R & -\rho I \\ A'_i + qI & \Omega'_b & -\rho I & -\rho S \end{bmatrix}, \quad (10)$$

com

$$\Gamma_a = A_i R + R A'_i + B_{2i} \hat{C}_i + \hat{C}'_i B'_{2i},$$

$$\Gamma_b = A'_i S + S A_i + \hat{B}_i C_{2i} + C'_{2i} \hat{B}'_i,$$

$$\Omega_a = A_i R + B_{2i} \hat{C}_i + qR,$$

$$\Omega_b = S A_i + \hat{B}_i C_{2i} + qS.$$

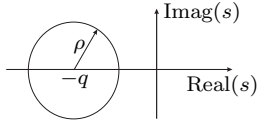


Figura 2: Região do plano- s limitada por uma circunferência de raio ρ e centro $(-q, 0)$.

Então pode-se obter a solução ótima para a norma \mathcal{H}_∞ de $w(t)$ para $z(t)$, com restrição para região de estabilidade ilustrada na Figura 2. Tem-se que $R = R' > 0$ e $S = S' > 0$, e as matrizes dinâmicas do compensador fuzzy \mathcal{H}_∞ podem ser obtidas através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} A_{c_{ij}} &= E^{-1} [\hat{A}_{ij} - SA_i R - E\hat{B}_i C_{2j} R - SB_{2i} \hat{C}_j \Psi'] (\Psi')^{-1} \\ B_{c_i} &= E^{-1} \hat{B}_i, \quad C_{c_i} = \hat{C}_i (\Psi^{-1})', \end{aligned} \quad (11)$$

sendo $E\Psi' = I - RS$.

Prova: Considera-se a seguinte realização em espaço de estado para o sistema não-linear descrito em (3) realimentado pelo compensador fuzzy \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$.

$$T_{wz} = (A_{nl}, B_{nl}, C_{nl}), \quad (12)$$

sendo

$$A_{nl} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_2(\alpha)C_c(\alpha) \\ B_c(\alpha)C_2(\alpha) & A_c(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B_{nl} = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$e \quad C_{nl} = [C_1(\alpha) \quad 0].$$

O problema de otimização para a norma \mathcal{H}_∞ com restrição de região de estabilidade para T_{wz} pode ser descrita como

$$\|T_{wz}\|_\infty^2 = \min \delta$$

$$s.a \begin{bmatrix} A_{nl}P + PA'_{nl} & B_{nl} & PC'_{nl} \\ B'_{nl} & -\delta I & 0 \\ C_{nl}P & 0 & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho P & A_{nl}P + qP \\ PA'_{nl} + qP & -\rho P \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

vide (Andrea, 2007) e (Nguang and Shi, 2006) para maiores detalhes.

O problema de otimização descrito em (13) e (14) apresenta não-linearidades, o que torna a solução do problema difícil. Utiliza-se transformações lineares (Chilali and Gahinet, 1996) para que o problema seja descrito em termos de LMIs. Adota-se,

$$P = \begin{bmatrix} R & \Psi \\ \Psi' & J \end{bmatrix}, \quad e \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} S & E \\ E' & \Phi \end{bmatrix},$$

sendo $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Defina-se ainda

$$P\beta_2 = \beta_1, \quad \text{com } \beta_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ \Psi' & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \beta_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & E' \end{bmatrix}.$$

Pré e pós multiplicando-se $P > 0$ por β'_2 e β_2 respectivamente obtém-se (4). Em seguida, pré e pós multiplica-se (13) pela matrizes diagonais (β'_2, I, I) e (β_2, I, I) respectivamente, obtendo-se (5). Finalmente, pré e pós multiplicando-se (14) pelas matrizes Φ' e Φ respectivamente, obtém-se (7), sendo $\Phi = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$.

As inequações (5) e (6) podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i \alpha_i \Gamma_{ii} + \sum_{i=1}^v \sum_{i < j}^r \alpha_i \alpha_j (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0. \quad (15)$$

Logo, uma condição suficiente para que a inequação (15) seja verdadeira, é que,

$$\Gamma_{ii} < 0 \text{ e } (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0. \quad (16)$$

Utilizando-se a análise descrita em (15)-(16), pode-se verificar que $\Omega(\alpha) < 0$, implica nas LMIs descritas em (7) e (8), sendo,

$$\Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i \alpha_i \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^v \sum_{i < j}^v \alpha_i \alpha_j (\Omega_{ij} + \Omega_{ji}) < 0$$

□

A equação das variáveis de estado que representa o diagrama de blocos ilustrado na Figura 1 pode ser descrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_\eta &= A_\eta x_\eta(t) + B_\eta r(t) + B_{wl} w(t), \\ e(t) &= D_\eta r(t) - C_\eta x_\eta(t), \\ y(t) &= C_{\eta l} x_\eta(t), \\ z(t) &= C_\eta x_\eta(t), \end{aligned} \quad (17)$$

sendo,

$$x_\eta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad A_\eta = \begin{bmatrix} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) \\ A_{13}(\alpha) & A_{14}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$B_\eta = \begin{bmatrix} B_2(\alpha)N(\alpha) \\ M(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B_{wl} = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$C_\eta = [C_1(\alpha) \quad 0], \quad C_{\eta l} = [C_2(\alpha) \quad 0] \text{ e } D_\eta = 1.$$

$$A_{11}(\alpha) = A(\alpha), \quad A_{12}(\alpha) = B_2(\alpha)C_c(\alpha),$$

$$A_{13}(\alpha) = B_c(\alpha)C_2(\alpha), \quad A_{14}(\alpha) = A_c(\alpha).$$

Considera-se a realização em espaço de estado entre o sinal de saída $z(t)$ e o sinal de distúrbio $w(t)$ descrita na forma

$$T_{wz_n} = (A_\eta, B_{wl}, C_\eta). \quad (19)$$

Neste caso a influência do distúrbio no sistema pode ser atenuada devido ao projeto inicial do compensador fuzzy \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$. Considera-se a realização em espaço de estado entre sinal de referência do sistema $r(t)$ e o sinal de erro de rastreamento $e(t)$ descrita na forma

$$T_\eta = (A_\eta, B_\eta, -C_\eta, D_\eta). \quad (20)$$

Através dos controladores de rastreamento $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$, pode-se minimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre $r(t)$ e $e(t)$. O processo de rastreamento não interfere no projeto de rejeição de distúrbio. Pois apenas B_η depende das matrizes $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$.

2.2 Rastreador de Sinais para Sistemas Não-Lineares

A solução para o problema de rastreamento consiste no projeto dos controladores $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ de T_η descrito em (20). De (13), pode-se descrever o problema da norma \mathcal{H}_∞ do sistema T_η como

$$\|T_\eta\|_\infty^2 = \min \delta, \quad P = P',$$

$$s.a \begin{bmatrix} A_\eta P + PA'_\eta & -PC'_\eta & B_\eta \\ -C_\eta P & -\delta I & D'_\eta \\ B'_\eta & D_\eta & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

Para o projeto do rastreador com peso na frequência, deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir,

$$\min \|T_\eta G\|_\infty, \quad (22)$$

sendo $G = (A_g, B_g, C_g)$ o sistema linear que proporcione o peso na frequência de saída, $T_\eta = (A_\eta, B_\eta, -C_\eta, D_\eta)$ é uma realização do sistema não-linear (20). Uma realização em espaço de estado $H_\phi = T_\eta G$ pode ser

$$\left[\begin{array}{c|c} A_\phi & B_\phi \\ \hline C_\phi & D_\phi \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_\eta & 0 & B_\eta \\ -B_g C_\eta & A_g & B_g \\ \hline 0 & C_g & 0 \end{array} \right]. \quad (23)$$

Então, propõe-se o Teorema 2 para o projeto de sistemas de rastreamento utilizando-se peso na frequência aplicado a sistemas não-lineares.

Teorema 2 *Considere o Problema com a Observação. Se existe matrizes $M(\alpha)$ ($M(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times p}$) e $N(\alpha)$ ($N(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$) que satisfazem as LMIs seguintes.*

$$\|T_\eta\|_\infty^2 = \min \delta$$

s.a $\Psi_{ii} < 0$ para $i = 1, 2, \dots, v$, (24)

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0 \text{ para } i < j < v, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad (26)$$

sendo Ψ_{ii} descrita em (29). Então pode-se minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do sistema $T_\eta = (A_\eta, B_\eta, -C_\eta, D_\eta)$ com peso na frequência. As matrizes $P_{ij} = P'_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3$, têm a mesma dimensão da matriz A , e para $j = 3$ e $i = 1, 2, 3$ as matrizes P_{ij} têm dimensões convenientes. Os controladores podem ser descritos como

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i M_i \quad e \quad N(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i N_i. \quad (27)$$

sendo α_i , a mesma função de pertinência adotada no projeto do compensador \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$.

Prova: A inequação (24) é obtida considerando-se as matrizes $(A_\eta, B_\eta, C_\eta, D_\eta) = (A_\phi, B_\phi, C_\phi, D_\phi)$ em (21), sendo a matriz P na forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

e $(A_\phi, B_\phi, C_\phi, D_\phi)$ dado por (23) e $(A_\eta, B_\eta, C_\eta, D_\eta)$ definidas em (18).

Como analisado no Teorema 1, a matriz $\Psi(\alpha) < 0$ implica nas LMIs (24) e (25), sendo

$$\Psi(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i \alpha_i \Psi_{ii} + \sum_{i=1}^v \sum_{i < j}^v \alpha_i \alpha_j (\Psi_{ij} + \Psi_{ji}) < 0.$$

As matrizes $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ são soluções de (24)-(26) e minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada de referência $r(t)$ e o erro de rastreamento $r(t) - z(t)$. □

Os filtros utilizados no Teorema 2 são utilizados somente em projeto, e posteriormente descartados para simulação ou implementação do controlador. No projeto de rastreamento abordado no Teorema 2 utilizou-se a mesma estrutura de controle com modificação de zeros para o caso de sistemas lineares abordada em (Assunção et al., 2004).

3 Exemplo de Aplicação

Considere o sistema não-linear massa-mola-amortecedor descrito na forma de variáveis de estado (Tanaka et al., 1996)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,02 - 0,67x_1(t)^2 & -0,1x_2(t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t). \quad (30)$$

Deseja-se projetar um sistema de rastreamento e rejeição de distúrbio para o sistema (30). No projeto do rastreador considera-se a faixa de valores para as variáveis de estado do sistema massa-mola-amortecedor: $-1,5 \leq x_1(t) \leq 1$; $-1,5 \leq x_2(t) \leq 1,5$.

No processo de modelagem exata do sistema não-linear abordado neste exemplo adotou-se:

$$\tilde{f}_{21}(x(t)) = -0,02 - 0,67x_1(t)^2 \quad e \quad \tilde{f}_{22}(x(t)) = -0,1x_2(t)^2.$$

Deste modo pode-se reescrever (30),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t). \quad (31)$$

Na representação exata do sistema não-linear, de acordo com (Taniguchi et al., 2001), utiliza-se os valores máximos e mínimos das funções $\tilde{f}_{21}(x(t))$ e $\tilde{f}_{22}(x(t))$, conforme descrito a seguir:

$$a_{211} = \max \{ \tilde{f}_{21} \} = -0,02; \quad a_{212} = \min \{ \tilde{f}_{21} \} = -1,5275;$$

$$a_{221} = \max \{ \tilde{f}_{22} \} = 0 \quad e \quad a_{222} = \min \{ \tilde{f}_{22} \} = -0,225.$$

Segundo o método proposto por (Taniguchi et al., 2001), a função não-linear \tilde{f}_{21} pode ser representada, da forma exata, por um modelo fuzzy T-S, considerando-se quatro modelos locais. O número de modelos locais é igual a $v = 2^p$, sendo p o número de não-linearidades na planta. Para a_{211} e a_{222} existem σ_{211} e σ_{212} tais que:

$$\tilde{f}_{21} = \sigma_{211} a_{211} + \sigma_{212} a_{212}, \quad 0 \leq \sigma_{211}, \sigma_{212} \leq 1 \quad (32)$$

$$e \quad \sigma_{211} + \sigma_{212} = 1.$$

De (32) tem-se:

$$\sigma_{211} = \frac{\tilde{f}_{21} - a_{212}}{a_{211} - a_{212}} \quad e \quad \sigma_{212} = \frac{a_{211} - \tilde{f}_{21}}{a_{211} - a_{212}}. \quad (33)$$

A função não-linear \tilde{f}_{22} também pode ser representada na forma exata por:

$$\tilde{f}_{22} = \Gamma_{221} a_{221} + \Gamma_{222} a_{222}, \quad 0 \leq \Gamma_{221}, \Gamma_{222} \leq 1 \quad (34)$$

$$e \quad \Gamma_{221} + \Gamma_{222} = 1.$$

De (34) tem-se,

$$\Gamma_{221} = \frac{\tilde{f}_{22} - a_{222}}{a_{221} - a_{222}} \quad e \quad \Gamma_{222} = \frac{a_{221} - \tilde{f}_{22}}{a_{221} - a_{222}}. \quad (35)$$

Reescrevendo-se (32) conforme a seguir:

$$\tilde{f}_{21} = (\Gamma_{221} + \Gamma_{222}) (\sigma_{211} a_{211} + \sigma_{212} a_{212}) = \quad (36)$$

$$\Gamma_{221} \sigma_{211} a_{211} + \Gamma_{221} \sigma_{212} a_{212} + \Gamma_{222} \sigma_{211} a_{211} + \Gamma_{222} \sigma_{212} a_{212}$$

Definindo-se em (36),

$$\alpha_1(x) = \Gamma_{221} \sigma_{211}, \quad \alpha_2(x) = \Gamma_{221} \sigma_{212}, \quad \alpha_3(x) = \Gamma_{222} \sigma_{211},$$

$$e \quad \alpha_4(x) = \Gamma_{222} \sigma_{212}. \quad (37)$$

Obtém-se:

$$\tilde{f}_{21} = \alpha_1(x) a_{211} + \alpha_2(x) a_{212} + \alpha_3(x) a_{211} + \alpha_4(x) a_{212} \quad (38)$$

$$\Psi_{ii} = \begin{bmatrix} A_{11i}P_{11} + P_{11}A'_{11i} + A_{12ii}P'_{12} + P_{12}A'_{12ii} & A_{11i}P_{12} + A_{12ii}P_{22} + P_{11}A'_{13ii} + P_{12}A'_{14ii} \\ A_{13ii}P_{11} + A_{14ii}P'_{12} + P'_{12}A'_{11i} + P_{22}A'_{12ii} & A_{13ii}P_{12} + P'_{12}A'_{13ii} + A_{14ii}P_{22} + P_{22}A'_{14ii} \\ -B_gC_{1i}P_{11} + A_gP'_{13} + P'_{13}A'_{11i} + P'_{23}A'_{12ii} & -B_gC_{1i}P_{12} + A_gP'_{23} + P'_{13}A'_{13ii} + P'_{23}A'_{14ii} \\ & C_gP'_{23} \\ & M'_i \\ & N'_i \\ A_{11i}P_{13} + A_{12ii}P_{23} - P_{11}C'_{1i}B'_g + P_{13}A'_g & P_{13}C'_g & B_{2i}N_i \\ A_{13ii}P_{13} + A_{14ii}P_{23} - P'_{12}C'_{1i}B'_g + P_{23}A'_g & P_{23}C'_g & M_i \\ -B_gC_{1i}P_{13} - P'_{13}C'_{1i}B'_g + P_{33}A'_g + A_gP_{33} & P_{33}C'_g & B_g \\ & & 0 \\ & & -I \\ & & -\delta I \end{bmatrix} \quad (29)$$

De maneira similar, pode-se reescrever \tilde{f}_{22} ,

$$\tilde{f}_{22} = \alpha_1(x)a_{221} + \alpha_2(x)a_{221} + \alpha_3(x)a_{222} + \alpha_4(x)a_{222} \quad (39)$$

Analisando-se (38) e (39) pode-se determinar os modelos locais para este sistema não-linear massa-mola-amortecedor,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,02 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,5275 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,02 & -0,225 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,5275 & -0,225 \end{bmatrix}, \\ B_{11} &= B_{12} = B_{13} = B_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ B_{21} &= B_{22} = B_{23} = B_{24} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_{11} &= C_{12} = C_{13} = C_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_{21} &= C_{22} = C_{23} = C_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

No processo de atenuação do efeito do sinal de distúrbio no sistema utilizou-se o Teorema 1 para o projeto do compensador \mathcal{H}_∞ . No projeto, utilizou-se como restrição para alocação dos pólos uma região limitada por uma circunferência de raio $\rho = 200$, com centro na origem. O controlador \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$, obtido foi o seguinte:

$\Rightarrow A_c :$

$$\begin{aligned} A_{c11} &= \begin{bmatrix} -175,11 & -0,443 \\ 78136,53 & -121,04 \end{bmatrix}, A_{c12} = \begin{bmatrix} -181,94 & -0,455 \\ 85182,40 & -105,88 \end{bmatrix}, \\ A_{c13} &= \begin{bmatrix} -178,35 & -0,450 \\ 87766,58 & -102,79 \end{bmatrix}, A_{c14} = \begin{bmatrix} -180,53 & -0,45 \\ 85684,27 & -104,99 \end{bmatrix}, \\ A_{c21} &= \begin{bmatrix} -181,82 & -0,45 \\ 103845,85 & -68,09 \end{bmatrix}, A_{c22} = \begin{bmatrix} -173,89 & -0,43 \\ 76449,35 & -125,26 \end{bmatrix}, \\ A_{c23} &= \begin{bmatrix} -181,34 & -0,45 \\ 104430,10 & -68,41 \end{bmatrix}, A_{c24} = \begin{bmatrix} -183,76 & -0,47 \\ 107616,69 & -41,50 \end{bmatrix}, \\ A_{c31} &= \begin{bmatrix} -181,23 & -0,44 \\ 89235,49 & -107,15 \end{bmatrix}, A_{c32} = \begin{bmatrix} -183,62 & -0,45 \\ 87738,58 & -109,91 \end{bmatrix}, \\ A_{c33} &= \begin{bmatrix} -175,54 & -0,43 \\ 79307,80 & -128,30 \end{bmatrix}, A_{c34} = \begin{bmatrix} -182,20 & -0,45 \\ 88251,46 & -109,02 \end{bmatrix}, \\ A_{c41} &= \begin{bmatrix} -182,42 & -0,45 \\ 104604,14 & -69,23 \end{bmatrix}, A_{c42} = \begin{bmatrix} -193,53 & -0,46 \\ 117575,93 & -60,10 \end{bmatrix}, \\ A_{c43} &= \begin{bmatrix} -181,94 & -0,45 \\ 105189,69 & -69,55 \end{bmatrix}, A_{c44} = \begin{bmatrix} -174,02 & -0,43 \\ 78216,82 & -124,08 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow B_c :$

$$\begin{aligned} B_{c1} &= \begin{bmatrix} -1,60 \\ 5568,38 \end{bmatrix}, B_{c2} = \begin{bmatrix} -1,60 \\ 5581,91 \end{bmatrix}, B_{c3} = \begin{bmatrix} -1,75 \\ 5814,91 \end{bmatrix}, \\ B_{c4} &= \begin{bmatrix} -1,64 \\ 5647,76 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_c :$

$$\begin{aligned} C_{c1} &= [-274007,52 \quad -1125,21], C_{c2} = [-272482,14 \quad -1121,55], \\ C_{c3} &= [-272002,82 \quad -1123,23], C_{c4} = [-268432,49 \quad -1113,58]. \end{aligned}$$

O controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ também pode ser descrito da seguinte maneira:

$$A_c(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \alpha_i \alpha_j A_{c_{ij}}, \quad B_c(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i B_{c_i}$$

$$\text{e } C_c(\alpha) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j C_{c_j}.$$

sendo α_i descrita em (37).

O valor de γ_{opt} , que é o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ de $w(t)$ para $y(t)$ obtida no procedimento de otimização foi 0,01, o que implica em uma atenuação do efeito do sinal de perturbação na saída do sistema massa-mola-amortecedor.

Como especificação de projeto o rastreador deve operar para baixas frequências, até 0,1 rad/seg, então foi proposto o seguinte filtro $G(s)$:

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 0,02s + 0,0001}.$$

No projeto do rastreador, utilizou-se a metodologia proposta no Teorema 2. Minimizou-se a norma \mathcal{H}_∞ de $r(t)$ para $\epsilon(t)$ considerando-se sinais de até 0,1 rad/seg. Neste exemplo analisou-se a norma \mathcal{H}_∞ em um dos modelos locais lineares que descrevem o sistema massa-mola-amortecedor. No modelo local 11 a norma \mathcal{H}_∞ para todo o espectro de frequência é 1,3724; enquanto para a banda de frequência especificada no problema, a maior magnitude de $|T_\eta(j\omega)|$ é 0,0184, sendo T_η descrito em (20).

A Figura 3 ilustra a resposta em frequência T_η considerando-se o modelo local 11, que é dado por

modelo local 11: $A_1, B_{21}, C_{11}, C_{21}, A_{c11}, B_{c1}, C_{c1}, M_1$ e N_1 .

Observou-se que a magnitude de T_η para

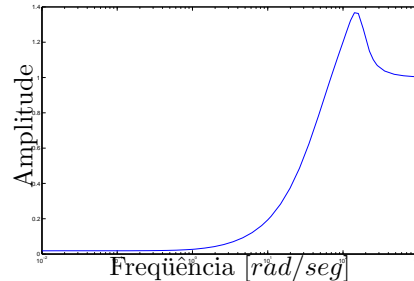


Figura 3: Resposta em frequência $T_\eta : |T_\eta(j\omega)| \times \omega$ para o modelo local 11.

a faixa de frequência em projeto é pequena, então, ocorre o processo de rastreamento nestas condições. Os controladores obtidos para o rastreamento foram:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} 0,0848 \\ -278,1318 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0,0540 \\ -240,6049 \end{bmatrix}, \\ M_3 &= \begin{bmatrix} 0,0584 \\ -227,5221 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0,0461 \\ -232,3054 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$N_1=3819,61$; $N_2=3804,04$; $N_3=3817,51$ e $N_4=3786,47$.

Pode-se descrever estes controladores como

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i M_i \quad \text{e} \quad N(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i N_i. \quad (40)$$

sendo α_i descrita em (37).

No processo de simulação considerou-se um sinal de referência $r(t) = 0,1 \text{sen}(0,1t)$ e um sinal de perturbação do tipo distúrbio com amplitudes aleatórias não superiores a 1. A Figura 4 ilustra o resultado da simulação.

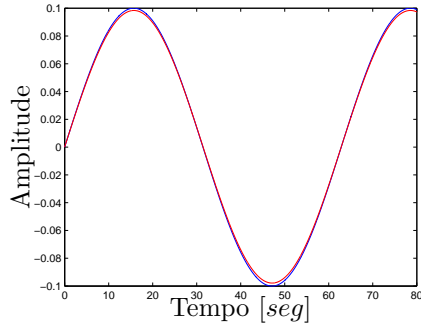


Figura 4: Sinal de saída $z(t)$ e o sinal de entrada $r(t)$ estão quase sobrepostos.

Para este exemplo, os zeros para o modelo local 11 são: $-178,135 \pm 163,115j$. Os pólos de malha fechada no modelo local 11 do sistema não-linear alocados na região são: $-56,522 \pm 152,745j$ e $-91,558 \pm 13,612j$.

4 Conclusões

Neste trabalho é proposta uma metodologia de rastreamento e rejeição de distúrbio aplicada a sistemas não-lineares. No projeto utilizaram-se os modelos fuzzy Takagi-Sugeno para descrever exatamente a planta não-linear. Para o processo de atenuação do efeito do sinal de distúrbio na saída do sistema, projetou-se um controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ de realimentação dinâmica da saída, de modo a minimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de distúrbio $w(t)$ e o sinal de saída $y(t)$. Para o rastreamento de sinais minimizou-se a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência $r(t)$ e o sinal de erro de rastreamento.

A metodologia de rastreamento e rejeição de distúrbios aplicada a sistemas não-lineares é descrita em termos de LMIs, que quando factíveis, podem ser facilmente solucionados através de algoritmos de convergência polinomial (Gahinet et al., 1995).

Agradecimentos

Os autores deste projeto agradecem a CNPq e FAPESP pelo suporte financeiro.

Referências

Andrea, C. Q. (2007). *Modificação de Zeros em Sistemas de Controle Robusto Utilizando LMIs*, Tese de Doutorado, UNESP, Ilha Solteira, SP.

Assunção, E., Andrea, C. Q. and Teixeira, M. C. M. (2004). Controle Ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com Modificação de Zeros para o Problema de Rastreamento Usando LMIs, *Sba Controle & Automação* **15**(4): 413–422.

Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). \mathcal{H}_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Mathworks Inc., USA.

Lin, C., Wang, Q. and Lee, T. H. (2006). \mathcal{H}_∞ Output Tracking Control for Nonlinear Systems via T-S Fuzzy Model Approach, *IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetic - Part B: Cybernetics* **36**(2): 450–457.

Nguang, S. K. and Shi, P. (2006). Robust \mathcal{H}_∞ Output Feedback Control Design for Fuzzy Dynamic Systems with quadratic \mathcal{D} stability constraints: An LMI approach, *Information Sciences* **176**(15): 2161–2191.

Takagi, T. Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions, Man, and Cybernetics* **15**: 116–132.

Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1996). Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, \mathcal{H}_∞ Control Theory, and Linear Matrix Inequalities, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1): 1–13.

Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. and Wang, H. O. (2001). Model Construction, Rule Reduction, and Robust Compensation for Generalized Form of Takagi Sugeno Fuzzy Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–538.

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Avellar, R. G. (2003). On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(5): 613–623.

Teixeira, M. C. M. and Zak, S. H. (1999). Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2): 133–142.